数理解析研究所講究録
906巻 1995年 14-23

ジャンケンのトーナメント表現と意味のある拡張

NTT通信網研究所　伊藤大雄 (ITO Hiro)
京都大学工学部　永持仁 (NAGAMOCHI Hiroshi)

1．まえがき　ジャンケンには石、紙、鋏の３つの手があり、石は鋏に勝ち、鋏は紙に勝ち、紙は石に勝つ。この関係は図１の様な有向非対称完全グラフ（＝トーナメント）で表すことができる（有向枝の尾の手が頭の手に勝つことを表す）。噂ではフランスにはこの、石、紙、鋏に壷という手を加えた４手のジャンケンがあるらしい（図２）。この様に、ジャンケンを拡張して考えると、任意のトーナメントに対して、対応するジャンケンが存在することになる。本稿では、これらのジャンケンの拡張のうち、意味のある拡張、面白い拡張とは何かを考えることにする。なお本稿で使用する用語は文献[1]に従う。

２．ジャンケンの成立する条件 ― 無意味手の有無

前節で述べたフランス式ジャンケンには重大な欠点がある。それは、石を出すくらいなら壷を出す方が絶対に有利、すなわち、石も壷も共に鋏に勝ち紙に負けそして石は壷に負けてしまう。だから石は出す必要がなくなり、日本のジャンケンの石を壷と言い換えただけの同じジャンケンになってしまう。図２のジャンケンの石の様に、それを出すくらいなら他の手（この例では壷）を出した方が絶対に有利である様な手のことを「無意味手」と呼ぶことにする。

【定義】トーナメント$G=(V,A)$において、$\exists i \in V$に対して、$\exists j \in V$が存在し、$(j,i) \in A$かつ、$\forall k \in V$に対し、$(i,k) \in A$ならば$(j,k) \in A$である時、

iを**無意味節点**と呼び、jはiを**無意味にする**と言う。トーナメントが無意味節点を持たない時、**極小**であると呼ぶ。□

【定理１】トーナメントG=(V,A)が極小である必要十分条件は、任意の節点組i, j∈Vについて、iからjの長さ（経由する枝数）２以下の有向路が存在する（すなわち直径が２以下である）ことである。□

証明）十分性の証明：トーナメントG=(V,A)の、任意の節点組i, j∈Vについてiからjの長さ２以下の有向路が存在し、かつ無意味節点が存在すると仮定する。無意味節点のひとつをi∈Vとする。iを無意味にする節点をj∈Vとすると、定義より(j,i)∈A、よって(i,j)∉A。iからjの長さ２以下の有向路が存在することから、∃k∈Vに対し、(i,k),(k,j)∈A。しかしこれは、jがiを無意味にする条件「∀k∈Vに対し、(i,k)∈Aならば(j,k)∈A」に反する。よって十分性が証明された。

必要性の証明：トーナメントG=(V,A)が極小であるとする。∀i,j∈Vに対して、トーナメントの性質より、(i,j)∈Aまたは(j,i)∈A。ここで(i,j)∈Aと仮定して一般性は失われない。するとiからjに長さ１の有向路が存在する。次に、無意味節点が無いので、∃k∈Vに対し、(j,k)∈Aかつ(i,k)∉Aである。よって(j,k),(k,i)∈Aであり、jからiに長さ２の有向路が存在することが分かる。よって∀i,j∈Vに対して、長さ２以下の有向路が存在し、必要性が証明された。　Q.E.D.

フランス式ジャンケン（図２）は石から壷への長さ２以下の有向路が存在しない。定理１によって無意味手の存在が、直径という人口に膾炙した概念に帰着された。グラフの直径に関しては様々な結果が報告されている[1] [2]。以下では極小トーナメントの存在性について議論する。

【補題2.1】節点数が２または４の極小トーナメントは存在しない。□

証明）節点数２または４の非同型なトーナメントは５種類しか無いので、それらを列挙して確かめれば良いので、詳細は略する。

【補題2.2】　任意の正の奇数nに対して、節点数nの極小トーナメントが

存在する。□

証明）数学的帰納法で証明する。

(1) $n=1$の時は明らかに極小トーナメントである。

(2)節点数n（奇数）の極小トーナメントを$G=(V,A)$、$V=\{1,2,\cdots,n\}$とする。その時、$V'=V\cup\{n+1,n+2\}$、$A\subset A'$、$(n+1,n+2)\in A'$、$\forall i\in V$について$(n+2,i),(i,n+1)\in A'$とすると、グラフ$G'=(V',A')$はトーナメントであり、明らかに$\forall i,j\in V'$について、i,j間に長さ２以下の有向路が存在する（図３参照）。よって、節点数$n+2$の極小トーナメントが存在する。

(1),(2)より証明される。　Q.E.D.

本補題は「正則なトーナメントの直径は２以下である。」[1]という事実からも簡単に示すことが出来る。ここで与えた補題2.2の証明では、直径２以下のトーナメントを構成する方法を示すことによって証明したが、この方法で作られたトーナメントは$n\geqq5$に対して正則では無い。この違いについては次章で詳しく論ずる。

【補題2.3】　６以上の任意の正の偶数nに対して、節点数nの極小トーナメントが存在する。□

証明）nを任意の５以上の奇数とし、節点数nの極小トーナメント（補題2.2より必ず存在）を$G=(V,A)$とおく。$V=\{1,2,\cdots,n\}$とする。その時、$V'=V\cup\{n+1\}$、$A\subset A'$とする。$n\geqq5$より、２本以上の枝の始点となる節点がVに存在する。その節点を1とし、$(1,2),(1,3)\in A$としても一般性は失われない。そこで、$(2,n+1),(3,n+1),(n+1,1)\in A'$とする。また、５以上$n$以下の任意の奇数$k$について、$(k-1,k)\in A$ならば$(k,n+1),(n+1,k-1)\in A'$、$(k,k-1)\in A$ならば$(k-1,n+1),(n+1,k)\in A'$とする。するとグラフ$G'=(V',A')$はトーナメントであり、明らかに$\forall i,j\in V'$について、$i,j$間に長さ２以下の有向路が存在する（図４参照）。よって、節点数$n+1$（＝任意の６以上の偶数）の極小トーナメントが存在する。　Q.E.D.

補題2.1、2.2、2.3から、直ちに次の定理が導かれる。

【定理２】　正の整数nを与えたとき、節点数nの極小トーナメントが存在する必要十分条件は$n \neq 2,4$である。□

定理２より、手数nが２と４以外の時は無意味手の無いジャンケンを作ることが出来ることが示された。補題2.2と2.3はその構成法の一つを示している。実は枝の向きをランダムに与えてトーナメントを作ると、nが十分大きければほとんどの場合に直径が２以下になる[2]ということが分かっている。

３．面白いジャンケンとは　本節では、ジャンケンが面白くなるための条件を検討する。補題2.2で、任意の正の奇数nに対して、節点数nの極小トーナメントが存在することを、構成的に示した。この方法に従えば、例えば、節点数７では図５(a)の様な極小トーナメントが得られる。しかし、節点数nの極小トーナメントは、この方法によらずとも、色々存在する。たとえば、図５(b)もその一例である。図５(a)と(b)の大きな違いは、(b)が、全ての節点が、３つの節点に勝り、３つの節点に劣る（これを３勝３敗と表す）のに対し、(a)では、1,2,3は３勝３敗だが、4は２勝４敗、5は４勝２敗、6は１勝５敗、7は５勝１敗と、ばらついていることである。この勝ち負けのばらつき方は、ジャンケンの面白さに大きく影響する。例えば(b)のジャンケンを行なった場合、７つの節点はどれも本質的に同じなので、勝負をする人の心理としては、どれを出しても同じである。これは、節点数３つのジャンケンと（「あいこ」になる確率は減るものの）あまり変わらず、節点数を増やした意味が少ない。それに対して(a)では、各節点の強さが異なるので、作戦の生じる余地がある。つまり、「7を出せば勝つ確率が高いので、出したいが、相手はそれを見越して、7に勝つ唯一の節点である（しかも7にしか勝たない）6を思い切って出すかもしれない。」等の駆け引きが生じるのである。トラン

プゲームでも、この様に節点間の強弱に変化をもたせて、面白さを出すのが、普通である（ナポレオン、戦争等）。節点の強さは、その節点が勝つ節点数と負ける節点数の差で表現できる。その強さのばらつき（分散）が、ジャンケンの面白さを決める１つの指針として、定義できる。

【定義】トーナメント$G=(V,A)$に対して、節点$i\in V$の**強度**$s(i)$を$s(i)=d^+(i) - d^-(i)$とする。ただし、$d^+(i)$はiを始点とする枝数（＝iが勝つ節点数）で、$d^-(i)$はiを終点とする枝数（＝iが負ける節点数）。またGの**興奮度**$e(G)$は、$e(G)=\Sigma_{i\in V}\, s(i)^2$ で与えられる。□

興奮度の自明な下限は手数nが奇数の時は0で、偶数の時はnである。

【定理３】　任意の正の奇数nに対し、$e(G)=0$である極小トーナメントが存在する。また６以上の任意の偶数nに対し、$e(G)=n$である極小トーナメントが存在する。□

証明）正則トーナメントの直径が２である[1]ことから、nが奇数の場合は自明。nが６以上の偶数の場合は、nが奇数の場合のトーナメントに補題2.3の方法を適用することで作成出来る。Q.E.D.

定理３とその証明は、興奮度最小のジャンケンの作成方法を示している。では次に、興奮度最大のジャンケンの作成方法を検討する。

【定理４】任意の正の奇数nに対して、補題2.2の方法で作成したトーナメントは$e(G)$が最大となる唯一の極小トーナメントである。□

定理４を証明するために、補題をいくつか証明しておく。

【補題3.1】mを任意の自然数とする。2m+1個の節点からなる任意の極小トーナメント$G=(V,A)$の、$|W|\leqq m$である任意の節点部分集合$W\subset V$は次の条件を満たす。

「$i\in W, j\in V-W$, である有向枝$(i,j)\in A$は$|W|$本以上存在し、
$i\in V-W, j\in W$, である有向枝$(i,j)\in A$も$|W|$本以上存在する。」□

補題3.1の証明）$V=\{1,2,\ldots,2m+1\}$, $W=\{1,2,\ldots,k\}$, $k\leqq m$とおく。$i\in W$に対して、$m+i\in V-W$を対応させる。定理１より、$(i, m+i)$または$(m+i, i)$を

含む長さ２の有向閉路が存在する。その閉路をC_iとすると、C_i上のWとV-Wに股がる２本の枝は、１本が必ず(i,j), j∈V-Wであり、別の１本が(j',i), j'∈V-Wである。i≠i'ならば、C_iと$C_{i'}$は枝を共有しないので、前記の枝はi毎に全て異なる。このことから補題3.1が示される。Q.E.D.

【補題3.2】　n個の節点からなる極小トーナメントG=(V, A)において、以下の２つが成立する。

(1) s(i)の最大値はn-3であり、s(i)=n-3を満たす節点は高々１つしか存在しない。また、s(i)=n-3なる節点iが存在するならば、s(j)=-n+3なる節点jも存在し、(j,i)∈Aである。

(2) s(i)の最小値は-n+3であり、s(i)=-n+3を満たす節点は高々１つしか存在しない。また、s(i)=-n+3なる節点iが存在するならば、s(j)=n-3なる節点jも存在し、(i,j)∈Aである。□

補題3.2の証明）(1)と(2)は有向枝の向きを逆にして考えれば等価なので、(1)のみを証明すれば良い。定理１より、全勝する節点は存在しないので、s(i)の最大値がn-3であることは明か。s(i)=s(i')=n-3, i≠i'とする。つまり、iとi'の入次数はそれぞれ１。補題3.1より、W={i, i''}とすると、V-Wから、Wに入る枝は２つ以上存在し、しかも、(i,i')∈Aまたは(i',i)∈Aである。これはiとi'の入次数はそれぞれ１であることに反する。よって、s(i)=n-3を満たす節点は高々一つしか存在しない。次に、s(i)=n-3を満たす節点が存在すると仮定する。その節点をnとし、nに勝つ唯一の節点をn-1としても一般性を失わない。即ち (n,1), (n,2), ..., (n,n-2), (n-1, n)∈Aとする。定理１より、 1, 2, ..., n-2からnまでの長さ２の有向路が存在するので、(1,n-1), (2,n-1), ..., (n-2,n-1)∈Aである。よってs(n-1)=-n+3。よってs(j)=-n+3なる節点が存在する。Q.E.D.

【補題3.3】　n個の節点からなる極小トーナメントG=(V, A)において、s(i)=n-3, s(i')=-n+3とする。GのV'=V-{i, i'}による誘導部分グラフG'=(V',A')は極小トーナメントを表す。□

補題3.3の証明）i=n, i'=n-1と仮定して一般性を失わない。補題3.2より、(n,1), (n,2), ..., (n,n-2), (1,n-1), (2,n-1), ..., (n-2,n-1), (n-1, n)∈Aである。よって、j, k∈{1,2,...,n-2}, j≠kについて、jからkへのnまたはn-1を経由する、長さ２の有向路は存在しない。このことから、Gの各点間に長さ２以下の有向路が存在するならば、G'においても各点間に長さ２以下の有向路が存在しなければならない。よって定理１より、G'は極小トーナメントを表す。Q.E.D.

定理４の証明）n=1の時は自明。よってn≧3の時を示す。n=2m+1（mは自然数）とおく。極小トーナメントG=(V,A)について、以下の性質が成り立つ。s(i)を非増加順にならべ、$x_1, x_2, ..., x_m, z, y_m, y_{m-1}, ..., y_1$とおく。すなわち　$x_1 \geqq x_2 \geqq ... \geqq x_m \geqq z \geqq y_m \geqq y_{m-1} \geqq ... \geqq y_1$　とする。すると補題3.1より、$1 \leqq k \leqq m$について、$\Sigma_{i=1}{}^{k} x_i \leqq (2m+1-k)k-2k=k(2m-k-1)$が成り立つ。同様に$\Sigma_{i=1}{}^{k} y_i \geqq k(2m-k-1)$も成立する。また、明かに$\Sigma_{i=1}{}^{m} x_i + \Sigma_{i=1}{}^{m} y_i + z = 0$が成立しなければならない。よって、以上の必要条件を制約条件とした、次の数理計画問題P_1を考える

問題P_1　max　$e(G)=\Sigma x_i^2 + \Sigma y_i^2 + z^2$

s.t.　$x_1 \geqq x_2 \geqq ... \geqq x_m \geqq z \geqq y_m \geqq y_{m-1} \geqq ... \geqq y_1$　(1)

$\Sigma_{i=1}{}^{m} x_i + \Sigma_{i=1}{}^{m} y_i + z = 0$　(2)

$\Sigma_{i=1}{}^{k} x_i \leqq k(2m-k-1)$　(3)

$\Sigma_{i=1}{}^{k} y_i \geqq k(2m-k-1)$　(4)

問題P_1は、明かに興奮度最大の極小トーナメントを求める問題の緩和問題である。以下で問題P_1の最適解が補題2.2で得られるトーナメントより構成される解のs(i)に一致することを証明する。問題の解を$\boldsymbol{\omega}=(w_1, w_2, ..., w_{2m+1})=(x_1, x_2, ..., x_m, z, y_m, y_{m-1}, ..., y_1)$と表す。補題2.2で得られるトーナメントに対応する解を$\boldsymbol{\omega}^*=(w_1{}^*, w_2{}^*, ..., w_{2m+1}{}^*)=(x_1{}^*, x_2{}^*, ..., x_m{}^*, z^*, y_m{}^*, y_{m-1}{}^*, ..., y_1{}^*)$とおく。ここに$x_i{}^*=2m-2i$, $y_i{}^*=-2m+2i$, $z^*=0$である。$\boldsymbol{\omega}^*$と異なる実行可能解$\boldsymbol{\omega}'=(w_1', w_2', ..., w_{2m+1}')=(x_1', x_2', ..., x_m', z', y_m', y_{m-1}', ..., y_1')$

が最適解であったと仮定する。$\boldsymbol{\omega}'$は$\boldsymbol{\omega}^*$と$x_1', x_2', \ldots, x_m', y_m', y_{m-1}', \ldots, y_1'$のうち、どれか必ず異なるものが存在する（∵総和が0に固定されているので、z一つだけ異なることは出来ない）。$x_1', x_2', \ldots, x_m'$の中に異なるものがあると仮定する（$y_m', y_{m-1}', \ldots, y_1'$の中に異なるものがあると仮定した場合も同様の論法で証明できる）。異なるものの中で最も小さい添え字をkとする。すると、$x_k'(=w_k')<x_k^*(=w_k^*)$である。（∵ $\sum_{i=1}^{k} x_i^* = k(2m-k-1)$なので、制約式(3)より。）よって$\Delta_k=w_k^*-w_k'\ (>0)$とおく。すると、$w_{k+1}', w_{k+2}', \ldots, w_{2m+1}'$の中に、正の数で、かつ対応する$w_{k+1}^*, w_{k+2}^*, \ldots, w_{2m+1}^*$より値の大きいものが存在する（∵存在しなければ$\boldsymbol{\omega}'$が最適解であることに反する）。そのうち、最も添え字の小さいものをw_j'とする。（ここで、$\boldsymbol{\omega}'$の中で$w_i'=w_j', i>j$である様なiが存在すれば、そのうち最大のものをjとおきなおす。つまり$w_j'>w_{j+1}'$である様にする。）$\Delta_j=w_j^*-w_j'<0$である。また、$\Delta'=w_j'-w_{j+1}'>0$とおく。$\Delta=\min(\Delta_k, -\Delta_j, \Delta', w_j')$ とすると、明かに、$\Delta>0$である。すると、$\boldsymbol{\omega}'$のうち、x_k'をΔ増やしてx_j'をΔ減らしたものを$\boldsymbol{\omega}''$とおくと、$\boldsymbol{\omega}''$は制約式を満たし、かつ目的関数が増加する。よって、$\boldsymbol{\omega}'$が最適解であることに反する。故に、$\boldsymbol{\omega}^*$と異なる解は最適解となり得ない。以上から$\boldsymbol{\omega}^*$がP_1の唯一の最適解であることが証明された。　次に、$\boldsymbol{\omega}^*$を与えるトーナメントは、補題2.2の作成法によるもののみであることを示す。$\boldsymbol{\omega}^*$を与える任意のトーナメントを$G=(V,A)$とする。Gにおいて、$s(n)=n-3$, $s(n-1)=-n+3$として一般性を失わない。補題3.2より、$(n-1,n)\in A$となる。よって、nとn-1の枝の付き方は、補題2.2でn-2個の節点に2つ節点を加える時の枝の付け方に他ならない。また、補題3.3より、$V-\{n-1, n\}$としても極小トーナメントであるので、同じ論法が繰り返し適用でき、結局n=3となるまで、補題2.2の作成法と全て一致することが解かる。故に、Gは補題2.2で作成されたものに他ならない。以上から、補題2.2の作成法によるものが、唯一の興奮度最大の極小トーナメントであることが示された。　Q.E.D.

４． あとがき　本稿ではジャンケンの一般化を計った。ジャンケンが意味を持つのは、無意味手を含まないことであり、ジャンケンをトーナメントで表現した時に、直径が２（以下）であることと、同値であることを示した。そして、任意の自然数nに対して、節点数がnである、無意味な手の無いジャンケン（極小トーナメント）の構成法を示した。また、ジャンケンの面白さとして、各手の勝ち数と負け数の差の二乗和を興奮度と定義し、任意の正の奇数nに対して、興奮度最大のジャンケンの作成法を示し、しかも各nについてこの作成法が唯一の興奮度最大のジャンケンであることを示した。この結果に従って手の数５の興奮度最大のジャンケンを作ってみた（図６）。その他の話題として、任意のトーナメントから得られる極小トーナメントは唯一であることが証明できる。また、偶数に対する興奮度最大のジャンケンについては、手数６の場合の興奮度は６しか無いことが解かっており、このジャンケンに補題2.2で行なった拡張法を加えていったものが最大であると予想される。拡張されたジャンケンを３人以上で行なったときの勝ち抜き法であるが、出された手から誘導される部分トーナメントの最も強い強連結成分に属する手を出した人が勝ち残る様にするのが妥当であろう。本稿で得られた結果はジャンケン以外にも、複数の選択肢から一つの妥当な方策を選ぶという問題の解決や問題例の作成に有用であると思われる。

謝辞　有益なご助言を頂いた、京都大学工学部の茨木俊秀教授、矢島脩三教授、慶応大学理工学部の榎本彦衛教授に感謝いたします。

文献　[1] Behzad M., Chartrand G. and Lesniack-Foster L, "Graphs & Digraphs," Prindle, Weber & Schmidt, 1979.（邦訳：秋山仁, 西関隆夫訳, グラフとダイグラフの理論," 共立出版, 1981.）[2] Moon J. W., "Topics on Tournaments," Holt, Rinehart and Winston, New York, 1968.

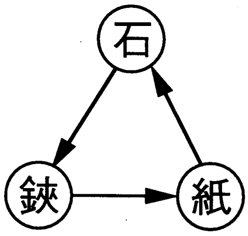

図１．　ジャンケンのグラフ表現

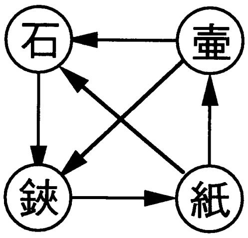

図２．　フランス式(?)ジャンケン

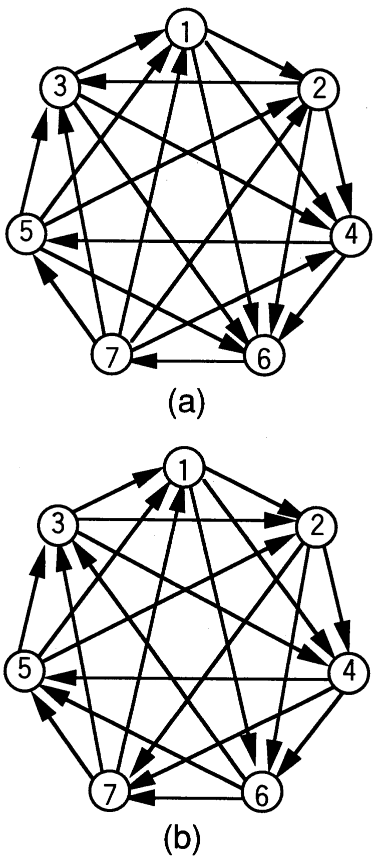

図５．　要素数７の、無意味要素の無いジャンケンの例

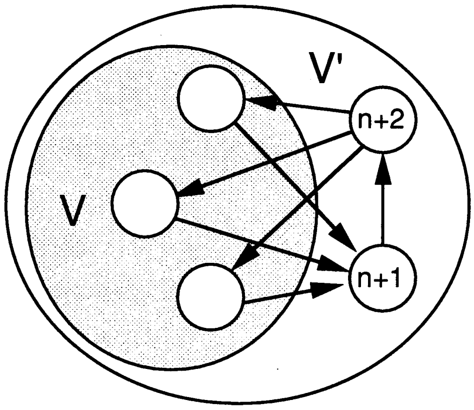

図３．　補題2.2の証明

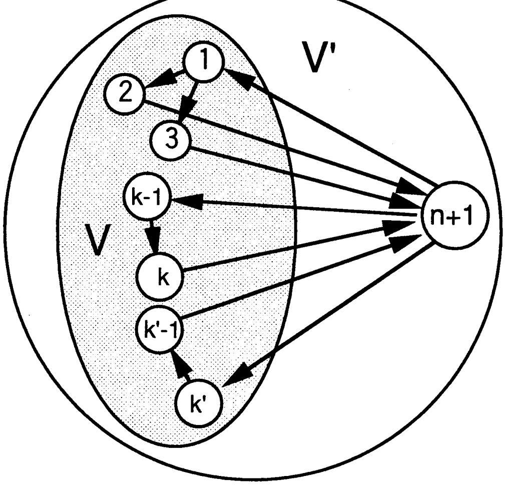

図４．　補題2.3の証明

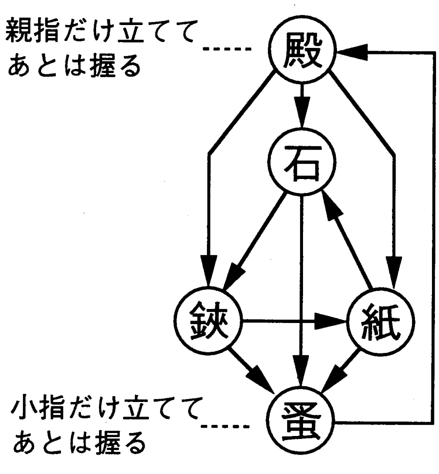

図６．　手の数５の興奮度最大のジャンケン